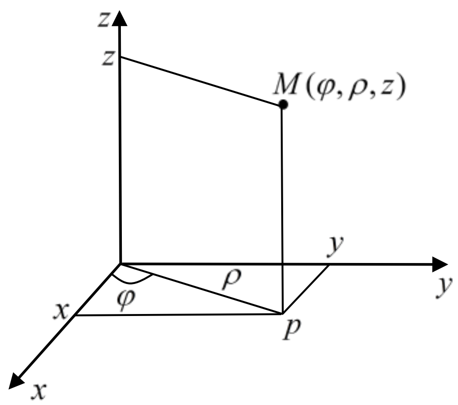
№6 дәріс

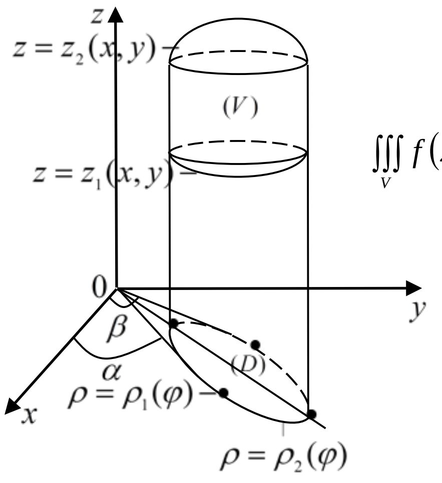
Үштік интегралда айнымалыларды алмастыру

1. ***Цилиндрлік координатарлар:***



$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$
$z=z,$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \ \cos\varphi=\dfrac{x}{\rho},\sin\varphi=\dfrac{y}{\rho}$



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}d\rho\int\limits_{z_1(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}\rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)dz$$

Мысалдар. 1) Интегралды есептеңіз: $I=\iiint\limits_V x^2zdV$, мұнда:

$V:\ x^2+y^2=R^2,\ z=0,\ z=H,\ (H\geq 0)-$ беттермен шектелген облыс.

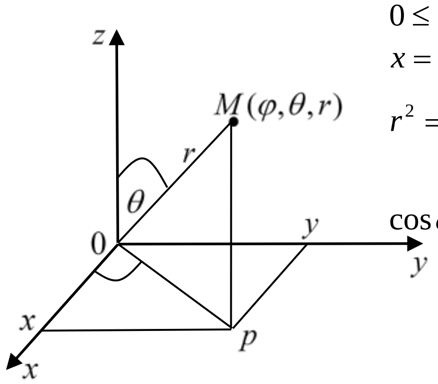
Шешуі. $I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R d\rho\int\limits_0^H\rho(\rho\cos\varphi)^2zdz=\dfrac{R^4H^2\pi}{8}.$

2) Егер тығыздығы $\mu(x,y,z)=k\cdot z$ болса, онда радиусы R болатын жарты шардың массасын есептеңіз.

Шешуі. Жоғары жарты сфераның теңдеуі $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Цилиндрлік координаталар системасында: $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ болады, сондықтан

$$M = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z\rho dz = \frac{k\pi R^4}{4}.$$

2) Сфералық координаталар:



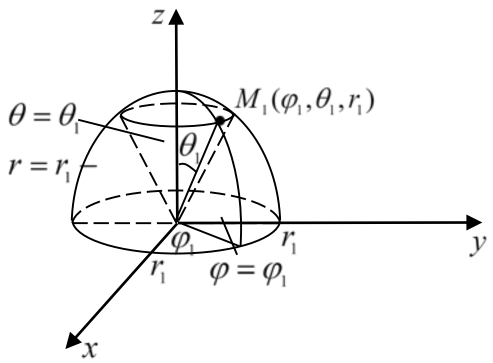
$$0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le r < \infty$$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \ \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Сфералық координаталар системасындағы координаттық беттерді қарастырайық:
1) $\varphi = \varphi_1$ теңдеу, мұнда $\varphi_1 = const$, Ox осімен φ_1 бұрыш жасайтын және Oz осінен өтетін – жарты жазықтық.
2) $\theta = \theta_1$ теңдеу, мұнда $\theta_1 = const$, бас нүктесі O-де, Oz осімен бас нүктеде жасайтын бұрыш 2θ-ға тең конус.



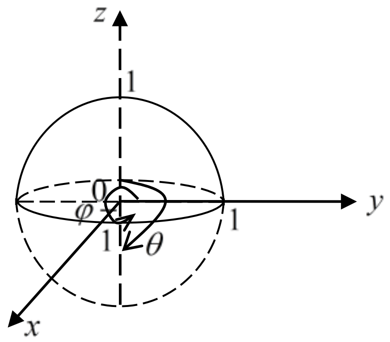
3) $r = r_1$ теңдеу, мұнда $r_1 = const$, центрі координаталар системасының бас нүктесіндегі сфера осы беттердің қиылысуы $M_1(\varphi_1, \theta_1, r_1)$ нүктені анықтайды.

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$$

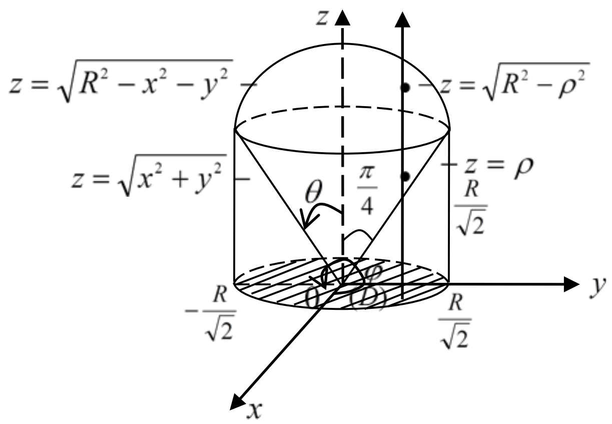
Мысалдар.

1) $I=\iiint\limits_{V}\dfrac{1}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dV,$ мұнда $V:\ x^2+y^2+z^2\le 1-$ шар, интегарлды тап.

Шешуі. $I=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{1}\dfrac{z^2\sin\theta}{1+r^3}dr=\dfrac{4\pi}{3}\ln 2$.



2) $I=\iiint\limits_{V}zdV$ берілген, мұнда V облыс $x^2+y^2=z^2$ конуспен және $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферамен шектелген $\left(z\ge 0\right)$.



Жасау керек:

1. Декарт координаталар системасында шектерін қою.
2. Цилиндрлік координаталар системасында шектерін қою.
3. Сфералық координаталар системасында шектерін қою.
4. Үш жағдайды қарастырып, ең қарапайым әдісті таңдаңыз.

Жауабы:

$$I=\int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}dx\int\limits_{-\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}zdz,\qquad I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}d\rho\int\limits_{\rho}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho zdz,$$

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{R}\left(r^2\sin\theta\right)\left(r\cos\theta\right)dr=\frac{\pi R^4}{8}.$$