№2 дәріс
Қос интегралды есептеу

$z = f(x,y)$ функциясы $D: a \le x \le b,\ c \le y \le d$ тік төртбұрышта анықталған болсын және әр $x \in [a,b]$ үшін мына интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ бар болсын. Демек, осы интегралды x-ке тәуелді функция ретінде қарастыруға болады:

$$\phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Егер осы функция $[a,b]$ аралықта интегралданатын болса, онда $U = \int\limits_a^b \phi(x)dx = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,y)dy \right\} dx$ – ды қайталанған интеграл деп атайды. Жазған кезде былай жазу тәртібі бар:

$$U = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Тура осылай мына қайталанған интеграл анықталады:

$$\overline{U} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

Қайталанған интеграл айнымалы шектерімен де болады:

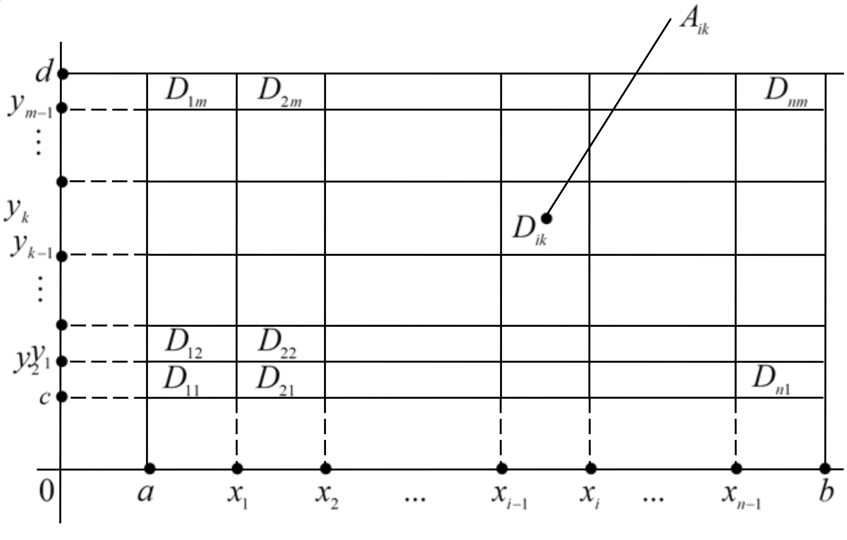
$$\phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy; \qquad U = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy;$$

$$\phi(y) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx; \qquad \overline{U} = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Теорема. Егер $f(x,y)$ функция D тік бұрышта үзіліссіз, ал $\varphi_1(x)$ және $\varphi_2(x)$ функциялар $[a,b]$ аралықта үзіліссіз, барлық қабылдайтын мәндер жиыны $[c,d]$ аралық болса, онда $\phi(x)$функция әр $y \in [c,d]$ үшін $[a,b]$-де үзіліссіз. Дәлеледеу үшін $\Delta\phi(x)$ өсімшесін мына түрде жазып:

$$\Delta\phi(x) = \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy - \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]dy,$$

$|\Delta\phi(x)| < \varepsilon$ теңсіздіктің орындалуын көрсету керек. Тура осылай $\phi(y)$ функция үшін теорема орындалады.



$$D_{ik}:\ x_{i-1}\le x\le x_i;\ \ y_{k-1}\le y\le y_k$$

$\sigma = \sum\limits_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ k=1,2,\dots,m}} f(x_i,y_k)\Delta\delta_{ik} = \sum\limits_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ k=1,2,\dots,m}} f(x_i,y_k)\Delta x_i\Delta y_k$ интегралдық қосынды,

$$\delta = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_i,y_k)\cdot\Delta y_k\right]\right\}\Delta x_i$$

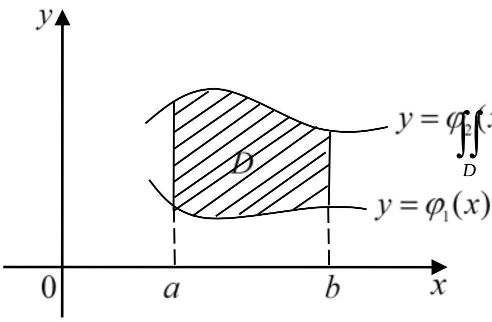
$\varepsilon > 0$ сан берілсін. Қос интегралдың бар болуынан: $\lim\limits_{d\to 0}\delta = I$, демек алдымен ішкі қосындының шегін қарастырып, содан соң сыртқы мына формулаға келеміз:

$$\iint_D f(x,y)d\delta = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

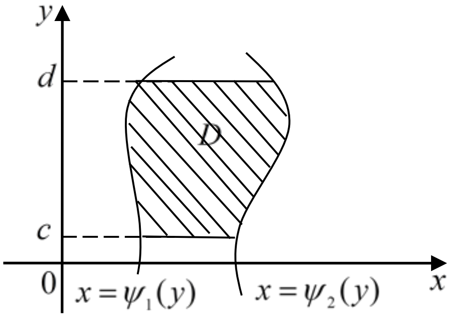
Мысалдар. 1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1,\quad D:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$

$$2)\ \iint_D x\sqrt{1+(x^2-1)\sin^2 y}\,dxdy,\ D: x=0,\ x=1,\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2}.$$

Қисық сызықты облыс



$$\iint_D f(x,y)d\delta = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$



$$\iint_D f(x,y)d\delta = \int_c^d dx\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

Жалпы жағдай үшін: облысты бірнеше бөлікке бөлу керек, бірінші немесе екінші түрге жататындай, сосын аддитивтік қасиет бойынша қосындыларын аламыз.