

Модели турбулентности, используемые при численных расчетах

Остановимся на теории идеализированной турбулентности, а именно, на однородной изотропной статистически стационарной турбулентности Колмогорова при больших числах Рейнольдса.

Рассматривая передачу энергии от больших энергетически неустойчивых вихревых структур к меньшим масштабам и используя анализ размерностей, эта теория дает универсальные соотношения между параметрами турбулентности.

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{(\Delta_l u)^3}{l} \quad \eta \equiv l_{\min} = l_{\min}(\varepsilon, \nu) \quad \eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad \Delta_\eta u = (\varepsilon \nu)^{1/4}$$

$$\text{Re}_\eta = \frac{\Delta_\eta u \cdot \eta}{\nu} = 1 \quad \Delta_L u = (\varepsilon L)^{1/4}$$

$$\text{Re}_L = \frac{\Delta_L u \cdot L}{\nu} = \text{Re}_\eta \left(\frac{L}{\eta} \right)^{4/3} \Rightarrow \frac{L}{\eta} \propto \text{Re}_L^{3/4} \quad l \propto \frac{1}{k} \quad E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \frac{\Delta_L u^3}{L} \equiv \frac{k^{3/2}}{L}$$

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \nu_T \frac{\Delta_L u^2}{L^2} \equiv \nu_T \frac{k}{L^2}$$

$$\nu_T = C_\mu L k^{1/2}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = C_\mu \frac{k^{3/2}}{L}$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

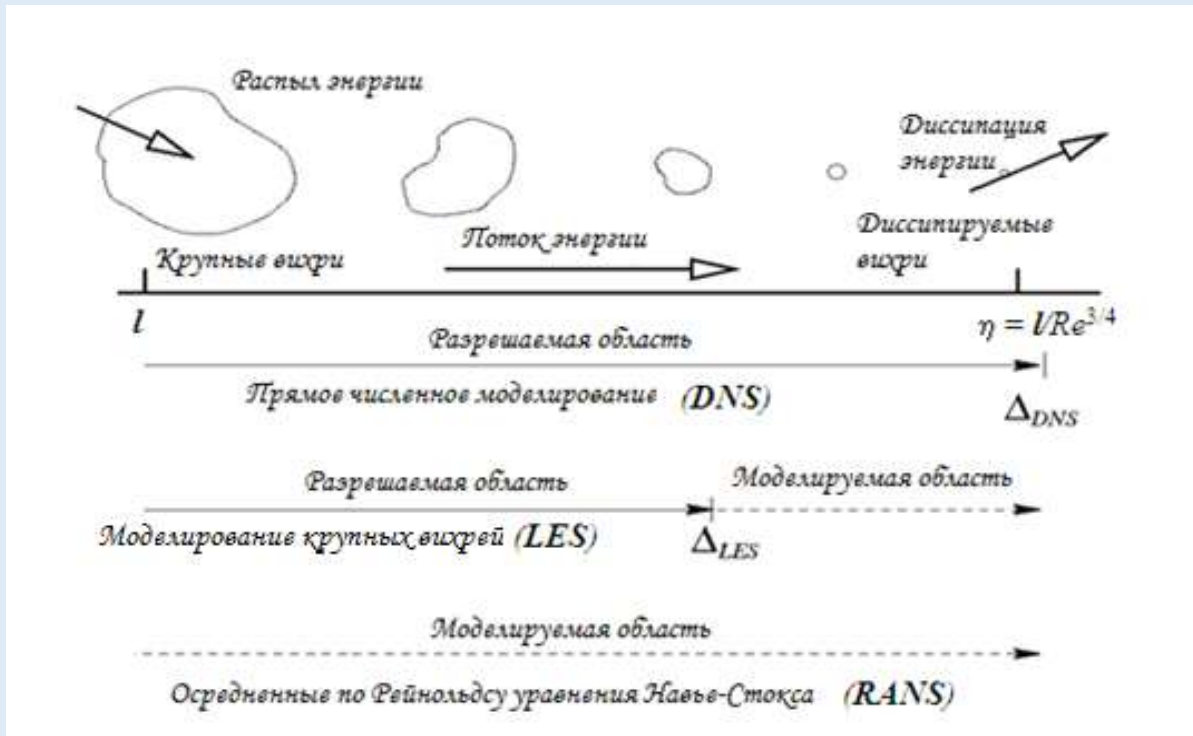


Рисунок 19 - Сравнение различных методов моделирования турбулентности

УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

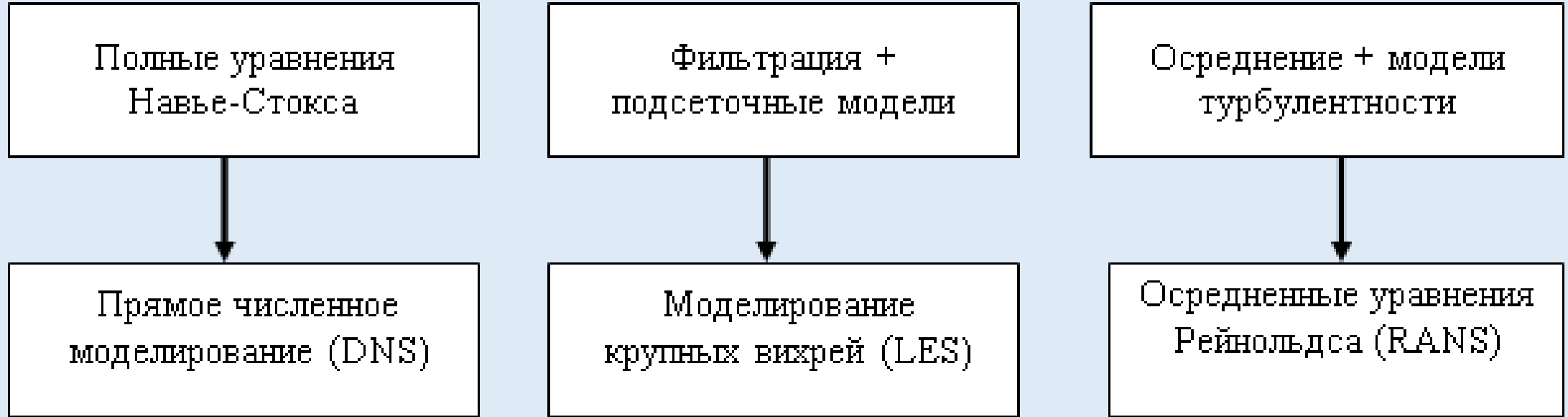


Рисунок 20 - Основные методы моделирования турбулентных течений

Прямое численное моделирование

Прямое численное моделирование (DNS) предполагает решение полных нестационарных уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности на численных сетках, достаточных для разрешения в среднем минимальных пространственных и временных масштабов турбулентности. Это означает, что не требуется дополнительного моделирования турбулентности

Однако, трудности DNS заключаются в ограниченности компьютерных ресурсов. Количество требуемых сеточных узлов и временных шагов существенно превосходят современные вычислительные мощности, если число Re становится существенным. Результаты, полученные с помощью такого моделирования, дают возможность проанализировать механизмы, которые контролируют статистические свойства турбулентности, а также имеют огромное значение при тестировании моделей турбулентности.

Моделирование крупных вихрей

Прямое численное моделирование турбулентных течений является неэффективными и чрезмерно дорогим, так как значительное количество вычислительных ресурсов расходуется, чтобы охватить малые вихревые структуры, в которых содержится незначительное количество кинетической энергии турбулентности. Моделирование крупных вихрей турбулентных течений (LES) является промежуточным методом между DNS и RANS и все чаще используется в качестве инструмента, предназначенного для изучения динамики турбулентности в технических приложениях.

Моделирование турбулентных течений состоит из четырех этапов:

1. Пространственная фильтрация;
2. Получение отфильтрованных уравнений Навье-Стокса;
3. Моделирование неразрешаемых движений;
4. Численное решение.

При моделировании крупных вихрей разрешаются большие масштабы потока и моделируются только малые масштабные структуры. Большие масштабы производятся за счет геометрии потока и могут меняться с изменением геометрии течения. С другой стороны, малые масштабы, которые участвуют в диссипации кинетической энергии турбулентности, как правило, универсальны и легко моделируются.

$$u_i(x_i, t) = \tilde{u}_i(x_i, t) + u'_i(x_i, t)$$

$$\tilde{u}(x, t) = \int_D G(r, x) u(x - r, t) dr$$

$$\int G(r, x) dr = 1$$

Отфильтрованные уравнения непрерывности, импульса и массы Навье – Стокса после операции фильтрации записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \tilde{S}_{mass}$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = \rho g - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \tilde{S}_{mom}$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{E} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \tilde{p} \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_j \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \tilde{S}_{energy}$$

Анизотропную часть подсеточного напряжения Рейнольдса, значение которого неизвестно, можно моделировать с помощью подхода Буссинеска:

$$\sigma_{ij}^s - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{\sigma}_{kk}^s = -\mu_t \tilde{S}_{ij}$$

Здесь $\tilde{\sigma}_{ij}$ играет схожую роль в отфильтрованных уравнениях, как тензор рейнольдсовых напряжений в RANS. \tilde{S}_{ij} обозначает тензор скорости деформации в отфильтрованном масштабе:

$$\tilde{S}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Осредненный по объему коробочный фильтр: $G(x - \xi; \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta, & |x_i - \xi_i| < \Delta x_i / 2 \\ 0, & |x_i - \xi_i| > \Delta x_i / 2 \end{cases}$

Фильтр Гаусса: $G(x - \xi; \Delta) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{3/2} \exp \left(-6 \frac{|x_i - \xi_i|^2}{\Delta^2} \right)$

Сокращенный фильтр Фурье: $G(x - \xi; \Delta) = \frac{1}{\Delta^3} \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(x_i - \xi_i) / \Delta}{(x_i - \xi_i) / \Delta}$

Модель Смагоринского

Первая модель для подсеточных напряжений была предложена Смагоринским, которая определяется по следующей формуле

$$q_{ij} - \frac{1}{3} q_{ll} \delta_{ij} = -C_s^2 \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

где

$$|\bar{S}|^2 = \frac{1}{2} \overline{S_{pq} S_{pq}}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}$$