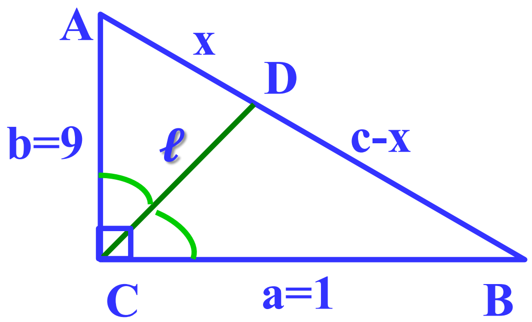
Волошина Н.Н., КГУ «ШГ № 5»
Березовская И.Э., КазНУ им. аль-Фараби

В ПОМОЩЬ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ, ВЫПУСКНИКАМ И АБИТУРИЕНТАМ …

Одна геометрическая задача

1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 9 и 12 соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.



Решение:

Пусть AC = b, BC = a, AB = c, CD = ℓ,
AD = x, тогда BD = c – x или BD = y

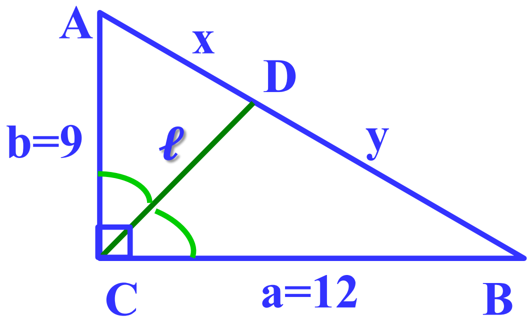
I способ

1. $c^2 = a^2 + b^2 = 81 + 144 = 225$, $c = 15$
2. $\frac{b}{a} = \frac{x}{c-x}$, по свойству биссектрисы

=> $\frac{9}{12} = \frac{x}{15-x}$, $3(15 - x) = 4x$, $7x = 45$, $x = \frac{45}{7}$

=> $c - x = 15 - \frac{45}{7} = \frac{60}{7}$

Ответ: AD = $\frac{45}{7}$, BD = $\frac{60}{7}$



II способ

1. a = 9, b = 12, => c = 15, как пифагоровы числа
2. $\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$, по свойству биссектрисы

=> $\frac{x}{9} = \frac{y}{12}$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, $x = \frac{3y}{4}$

Но $c = x + y = 15$, => $x = 15 - y$

3. $\frac{3y}{4} = 15 - y$, $3y = 60 - 4y$, $7y = 60$, $y = \frac{60}{7}$

=> $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{60}{7} = \frac{45}{7}$

Ответ: AD = $\frac{45}{7}$, BD = $\frac{60}{7}$

III способ

Используем формулу для произвольного треугольника:

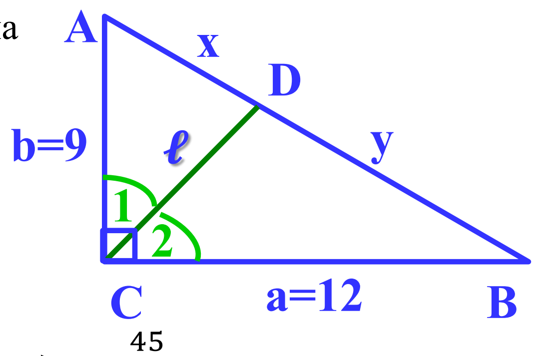
$$\ell = \frac{1}{a+b} \cdot \sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$$

но для прямоугольного треугольника:

$$(a+b)^2 - c^2 = \underline{a^2 + b^2} + 2ab - c^2 = c^2 - c^2 + 2ab = 2ab, =>$$

$$\ell = \frac{1}{a+b} \cdot \sqrt{ab \cdot 2ab} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \quad (1) \qquad \text{т.косинусов: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \ (2)$$

1. a = 9, b = 12, => c = 15, как пифагоровы числа



2. $\angle 1 = \angle 2 = 45^{\circ}$, по опр.биссектрисы

3. $\ell = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} = \frac{12 \cdot 9\sqrt{2}}{12+9} = \frac{12 \cdot 9\sqrt{2}}{21} = \frac{36\sqrt{2}}{7}$

4. ΔACD: $x^2 = b^2 + \ell^2 - 2b\ell \cdot \cos 45^{\circ} =$

$= 81 + \frac{2592}{49} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{36\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 81 + 52\frac{44}{49} - \frac{648}{7} = 133\frac{44}{49} - 92\frac{4}{7} = 41\frac{16}{49} = \frac{2025}{49}$, $\Rightarrow x = \frac{45}{7}$

5. ΔBCD: $y^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cdot \cos 45^{\circ} = 144 + \frac{2592}{49} - 2 \cdot 12 \cdot \frac{36\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$=144 + 52\frac{44}{49} - \frac{864}{7} = 196\frac{44}{49} - 123\frac{3}{7} = 73\frac{23}{49} = \frac{3600}{49}$, $\Rightarrow y = \frac{60}{7}$

Ответ: $AD = \frac{45}{7}$, $BD = \frac{60}{7}$

III способ самый не рациональный, но в общем виде есть выведение новой формулы, при помощи которой данная задача решается за считанные секунды…

$$\boldsymbol{\ell = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}$$

1) $x^2 = b^2 + \ell^2 - 2b\ell \cdot \cos 45^{\circ} \Rightarrow x^2 = b^2 + \ell^2 - \sqrt{2}b\ell = b^2 + \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} - \frac{\sqrt{2}b \cdot ab\sqrt{2}}{a+b} =$

$= \frac{b^2(a+b)^2+2a^2b^2-2ab^2(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{b^2((a+b)^2+2a^2-2a(a+b))}{(a+b)^2} =$

$= \frac{b^2(a^2+b^2+2ab+2a^2-2a^2-2ab)}{(a+b)^2} = \frac{b^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{b^2c^2}{(a+b)^2}$

$\Rightarrow \mathbf{x} = \sqrt{\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}} = \frac{bc}{a+b}$, $\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{bc}{a+b}$ **(2)**

2) $y^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cdot \cos 45^{\circ} \Rightarrow y^2 = a^2 + \ell^2 - \sqrt{2}a\ell = a^2 + \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} - \frac{\sqrt{2}a \cdot ab\sqrt{2}}{a+b} =$

$= \frac{a^2(a+b)^2+2a^2b^2-2a^2b(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{a^2((a+b)^2+2b^2-2b(a+b))}{(a+b)^2} =$

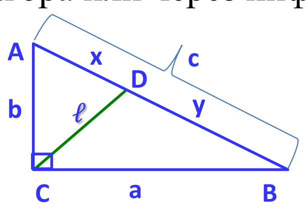
$= \frac{a^2(a^2+b^2+2ab+2b^2-2b^2-2ab)}{(a+b)^2} = \frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}$

$\Rightarrow \mathbf{y} = \sqrt{\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}} = \frac{ac}{a+b}$, $\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{ac}{a+b}$ **(2)**

IV способ

1. $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$, по т. Пифагора или через пифагоровы числа (если заданы по условию задачи)

2. $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{bc}{a+b} \\ \mathbf{y} = \frac{ac}{a+b} \end{cases}$ (2)



2. В прямоугольном треугольнике катеты равны $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Решение:

1. $c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 2 = 5$, по т. Пифагора, => $c = \sqrt{5}$

2. $\begin{cases} x = \frac{bc}{a+b} \\ y = \frac{ac}{a+b} \end{cases}$ (2) => $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \end{cases}$

3. В прямоугольном треугольнике катеты равны $\sqrt{6}$ и $\sqrt{5}$ соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Решение:

1. $c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 5 = 11$, по т. Пифагора, => $c = \sqrt{11}$

2. $\begin{cases} x = \frac{bc}{a+b} \\ y = \frac{ac}{a+b} \end{cases}$ (2) => $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \\ y = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \end{cases}$

4. В прямоугольном треугольнике катеты равны 7 и 24 соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Решение:

1. a = 7, b = 24, => c = 25, как пифагоровы числа

2. $\begin{cases} x = \frac{bc}{a+b} \\ y = \frac{ac}{a+b} \end{cases}$ => $\begin{cases} x = \frac{24\cdot 25}{7+24} = \frac{600}{31} \\ y = \frac{7\cdot 25}{7+24} = \frac{175}{31} \end{cases}$

Решите самостоятельно разными способами:

5. В прямоугольном треугольнике катеты равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$ соответственно. Найдите длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Пифагоровы числа $a^2 + b^2 = c^2$ => $(k\cdot a)^2 + (k\cdot b)^2 = (k\cdot c^2)$

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
12	35	37
20	21	29
-	-	-

=>

a	b	c
6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25
-	-	-

Успехов в решении задач!