Максвеллдің үлестіру заңы

Газдағы молекулалар соқтығысқан кезде олардың жылдамдығы үнемі өзгеріп отырады, орташа жылдамдық:

$$< \mathrm{v}_{кв.} > = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = A \cdot \sqrt{T}$$

Тек T - ға байланысты

Газда молекулалардың жылдамдықтар бойынша стационарлық үлестірілуі байқалады (уақыт өте келе өзгермейді), бұл үлестірілуді сипаттау үшін молекулалардың f (v) жылдамдықтары бойынша үлестірілу функциясын білу қажет.

$$\frac{dN(\mathrm{v})}{N} = f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

$dN(\mathrm{v})$ - интервалдағы молекулалар саны

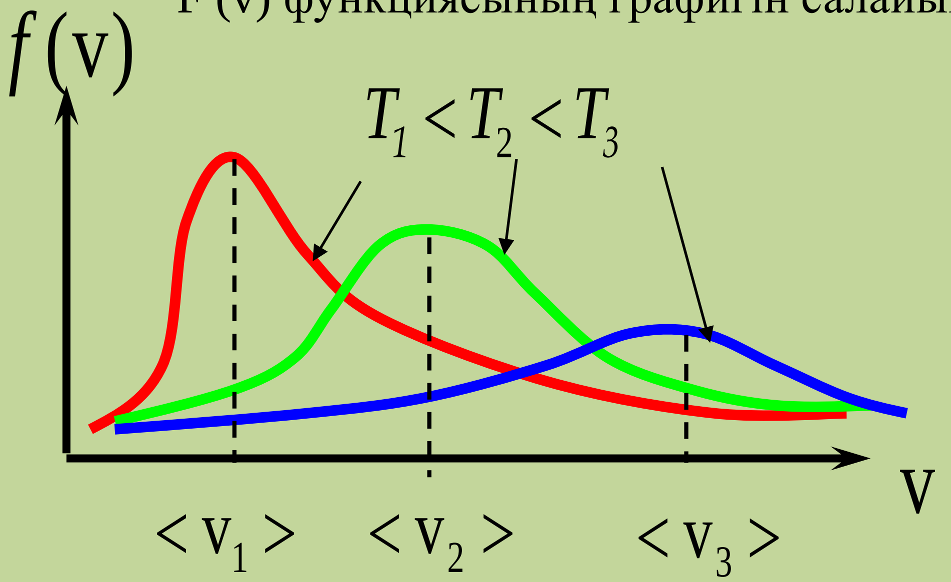
$$\mathrm{v}_0 < \mathrm{v} < \mathrm{v}_0 + d\mathrm{v}$$

$$f(\mathrm{v}) = \frac{dN(\mathrm{v})}{N \cdot d\mathrm{v}}$$

Максвелл теориялық тұрғыдан f (v) функциясын тапты:

$$f(\mathrm{v}) = 4\pi\left[\frac{m_0}{2\pi kT}\right]^{3/2} \mathrm{v}^2 e^{-\frac{m_0 \mathrm{v}^2}{2kT}}$$

F (v) функциясының графигін салайық:



(аз жылдамдықтарда графиктің артуын v^2 көбейткіші анықтайды
үлкен v жылдамдықтарда exp(…) көбейткіші v^2 көбейткішіне қарағанда тезірек кемиді)

Сұрақ? f (v) максимумын қалай табуға болады, яғни ең ықтимал жылдамдық мәні?

Жауап! f (v) функциясынан v бойынша туындысын алып және оны нөлге теңестіреміз.

$$\frac{df(\mathrm{v})}{d\mathrm{v}} = \frac{d}{d\mathrm{v}}\left(4\pi\left[\frac{m_0}{2\pi kT}\right]^{3/2}\mathrm{v}^2 e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}}\right) =$$

$$4\pi\left[\frac{m_0}{2\pi kT}\right]^{3/2}\frac{d}{d\mathrm{v}}\left(\mathrm{v}^2 e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}}\right) =$$

$$\underbrace{4\pi\left[\frac{m_0}{2\pi kT}\right]^{3/2}}_{\text{әрқашан } \neq 0}\underbrace{\left(2\mathrm{v}e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}} - \frac{m_0\mathrm{v}^3}{kT}e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}}\right)}_{\text{Жақшаны нөлге теңестіреміз}} = 0$$

$$2\mathrm{v}\left(1-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}\right)e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}}=0$$

Нөлдік теңдік мынадай жағдайларда орындалады:

1) v = 0, 2) v = ∞, бұдан: $e^{-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}}=0$

3) $\left(1-\frac{m_0\mathrm{v}^2}{2kT}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{v}_{н.в.}=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}$

Орташа (арифметикалық) жылдамдық:

$$<\mathrm{v}>=\frac{1}{N}\int_0^\infty \mathrm{v}\cdot dN(\mathrm{v})=\int_0^\infty \mathrm{v}\cdot f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

$$\boxed{<\mathrm{v}>=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}$$

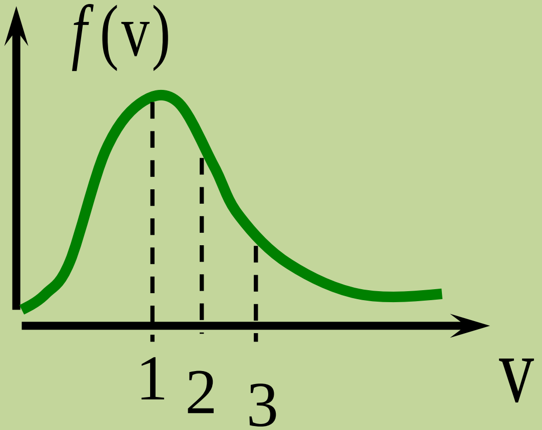
- орташа (арифметикалық) жылдамдық.

Қорытындылай келе, идеал газдың күйі үш жылдамдықты сипаттап берді:

- ✓ Ең ықтимал (1): $$\mathrm{v}_{н.в.} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

- ✓ Орташа жылдамдық (2): $$<\mathrm{v}> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1{,}13 \cdot \mathrm{v}_{н.в.}$$

- ✓ Орташа квадраттық (3): $$<v_{кв.}> = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1{,}22 \cdot \mathrm{v}_{н.в.}$$



Жылдамдықтар бойынша үлестірілу арқылы молекулалардың энергия бойынша үлестірілуін алуға болады:

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}$$

Максвеллдің үлестірілуіне қояйық:

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = N \cdot f(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

- Максвеллдің энергия бойынша үлестірілуі

Орташа кинетикалық энергия:

$$< \varepsilon > = \int_0^\infty \varepsilon \cdot f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2} kT$$